Nombres Surréels et nombres Dyadiques

Soit $s_n = \dfrac{N}{2^n}$ un nombre dyadique avec N *et* n *deux entiers positifs* $\geqslant 1$, N étant impair.
Ce nombre dyadique s_n peut être considéré comme la valeur numérique du nombre surréel $S_n = \langle\, L \mid R \,\rangle$ avec respectivement L et R les parties gauche et droite non vides du nombre surréel qui peuvent être également des nombres surréels.

Nous noterons respectivement l_n et r_n les valeurs numériques de L et R avec $l_n < r_n$.

Nous allons montrer la relation :

$$\boxed{S_n = \langle\, s_n - \frac{1}{2^n} \mid s_n + \frac{1}{2^n} \,\rangle = \langle \frac{N-1}{2^n} \mid \frac{N+1}{2^n} \rangle}$$

Cette relation réalise une application de l'ensemble des nombres dyadiques vers la classe des nombres surréels. Nous montrerons également que la réciproque est vrai ; à savoir :

Si l_n et r_n vérifient certaines conditions en plus de $l_n < r_n$, alors la valeur de s_n peut être déterminée simplement à partir de ces 2 seuls nombres l_n et r_n conduisant à exprimer le même nombre surréel s_n au moyen de plusieurs représentations différentes.

Décomposons s_n *dans sa représentation binaire qui se termine toujours par* 1 *car* N *est impair* .
$s_n = e.k_1 k_2 k_3 \ldots k_{n-1} 1_n$ *où* e *est la partie entière de la division de* N *par* 2^n *et où les chiffres* k_i *avec* i *compris entre* 1 *et* $n-1$ *sont égaux à* 0 *ou à* 1 .
La valeur de s_n *peut aussi s'exprimer par* $(e + \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{k_i}{2^i} + \dfrac{1}{2^n})$ *avec* $n \geqslant 1$ *et* $k_i \in \{0,1\}$

La décomposition binaire de s_n *est l'une des* 4 *formes suivantes* :

1. $s_n = e.0_1 0_2 0_3 \ldots 0_{n-1} 1_n$ *correspondant au nombre* $e + \dfrac{1}{2^n}$ (tous les k_i sont à égaux à 0 comme pour le nombre $1 / 16 = 0.0001$; $n = 4$)

2. $s_n = e.1_1 1_2 1_3 \ldots 1_{n-1} 1_n$ *correspondant au nombre* $e + \dfrac{2^n - 1}{2^n} = (e+1) - \dfrac{1}{2^n}$ (tous les k_i sont à égaux à 1 comme pour le nombre $255 / 128 = 1.1111111 = 2 - 1/128$; $n = 7$)

3. $s_n = e.k_1 k_2 k_3 \ldots k_{p-1} 1_p 0_{p+1} 0_{p+2} \ldots 0_{n-1} 1_n$ *avec* $1 \leqslant p < (n-1)$ *(au moins un* k_i *est égal à 1 à la position* p *suivi d'une séquence terminale* $0_{p+1} 0_{p+2} \ldots 0_{n-1} 1_n$ *de* $(n-p)$ *chiffres comme pour le nombre* $721 / 512 = 1.01101\,\underbrace{0001}_{4\,chiffres} = 1 + 1/4 + 1/8 + 1/32 + 1/512$ *;* $n = 9$ *et* $p = 5$ *)*
   Cette décomposition est un nombre de la forme $e + \sum_{i=1}^{p-1} \dfrac{k_i}{2^i} + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{2^n}$ *avec les conditions* $1 \leqslant p < (n-1)$ *et* $k_i \in \{0,1\}$ *pour ne pas retrouver la* $1^{ère}$ *décomposition.*

Nombres Surréels et nombres Dyadiques

4. $s_n = e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 0_p 1_{p+1} 1_{p+2} ... 1_{n-1} 1_n$ *avec* $1 \leqslant p < n-1$ *(au moins un* k_i *est à égal à 0 à la position* p *suivi d'une séquence terminale* $1_{p+1} 1_{p+2} ... 1_{n-1} 1_n$ *de* $(n-p)$ *chiffres comme pour le nombre* $167/64 = 10.100\underbrace{111}_{3\,chiffres} = 2+1/2+1/16+1/32+1/64$; $n = 6$ *et* $p = 3$ *)*
Cette décomposition est le nombre $e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \sum_{i=p+1}^{n} \frac{1}{2^i} = e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^n}$ *avec les conditions* $1 \leqslant p < (n-1)$ *et* $k_i \in \{0,1\}$ *pour ne pas retrouver la* $2^{ème}$ *décomposition.*

Par définition des nombres surréels, la partie gauche notée X_L *est l'ensemble des nombres qui composent* S_n *et strictement plus petits que* s_n *et la partie droite notée* X_R *est l'ensemble des nombres qui composent* S_n *et strictement plus grands que* s_n.
Lorsque ces ensembles L *et* R *sont finis et non vides, ils peuvent se réduire respectivement à :*

$$L = Plus\ grand\ nombre\ de\ X_L = max(\{x_L\})\ \text{où}\ \{x_L\}\ est\ l'ensemble\ des\ valeurs\ de\ X_L$$
$$R = Plus\ petit\ nombre\ de\ X_R = min(\{x_R\})\ \text{où}\ \{x_R\}\ est\ l'ensemble\ des\ valeurs\ de\ X_R$$

Appliquée aux 4 décompositions identifiées, la règle précédente permet de trouver pour chacune d'entre elles la valeur l_n *de la partie gauche* L *et la valeur* r_n *de la partie droite* R *; à savoir :*

L'ensemble L est composé des nombres $e.k_1 k_2 k_3 ... k_{n-1} k_n$ *strictement inférieurs à* s_n *et où* $k_i \in \{0,1\}$ *. De la même manière, l'ensemble R est composé des nombres* $e.k_1 k_2 k_3 ... k_{n-1} k_n$ *strictement supérieurs à* s_n *et où* $k_i \in \{0,1\}$.

1. *Avec la décomposition* $s_n = e.0_1 0_2 0_3 ... 0_{n-1} 1_n$ *, l'ensemble L est réduit à la partie entière* e *et le plus petit nombre de l'ensemble R strictement inférieur à* s_n *est* $e.0_1 0_2 0_3 ... 1_{n-1}$.

   Par conséquent $l_n = e$ *et* $r_n = e.0_1 0_2 0_3 ... 1_{n-1}$ *soit encore* $l_n = s_n - \frac{1}{2^n}$ *et* $r_n = s_n + \frac{1}{2^n}$

2. *Avec la décomposition* $s_n = e.1_1 1_2 1_3 ... 1_{n-1} 1_n$ *, le plus grand nombre de l'ensemble L strictement supérieur à* s_n *est* $e.1_1 1_2 1_3 ... 1_{n-1}$ *. L'ensemble R est réduit au nombre* $(e+1)$ *. Par conséquent*

   $l_n = e.1_1 1_2 1_3 ... 1_{n-1}$ *et* $r_n = e + 1$ *soit encore* $l = s_n - \frac{1}{2^n}$ *et* $r = s_n + \frac{1}{2^n}$

Nombres Surréels et nombres Dyadiques

3. *Avec la décomposition* $s_n = e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 1_p 0_{p+1} 0_{p+2} ... 0_{n-1} 1_n$ *, le plus grand nombre de l'ensemble L strictement supérieur à* s_n *est* $e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 1_p$ *avec les mêmes* k_i *que dans la décomposition de* s_n *. Le plus petit nombre de l'ensemble R strictement inférieur à* s_n *est* $e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 1_p 0_{p+1} 0_{p+2} ... 1_{n-1}$ *avec les mêmes* k_i *que dans la décomposition de* s_n *.*

   Une autre façon de raisonner est de partir de l'expression de s_n *et de dire que le plus grand nombre inférieur à* $s_n = (e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^n})$ *est le nombre*
   $(e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^p})$ *(soustraction de la quantité* $\frac{1}{2^n}$ *de* s_n *)*

   De même le plus petit nombre supérieur à s_n *est le nombre*
   $$e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{n-1}} = (e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{2^n}$$
   (ajout de la quantité $\frac{1}{2^n}$ *à* s_n *)*

   Par conséquent $l_n = e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 1_p$ *et* $r_n = e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 1_p 0_{p+1} 0_{p+2} ... 1_{n-1}$
   soit encore $l_n = s_n - \frac{1}{2^n}$ *et* $r_n = s_n + \frac{1}{2^n}$

4. *Avec la décomposition* $s_n = e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 0_p 1_{p+1} 1_{p+2} ... 1_{n-1} 1_n$ *, le plus grand nombre de l'ensemble L est* $e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 0_p 1_{p+1} 1_{p+2} ... 1_{n-1}$ *avec les mêmes* k_i *que dans la décomposition de* s_n *. Le plus petit nombre de l'ensemble R strictement inférieur à* s_n *est* $e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 1_p$ *avec les mêmes* k_i *que dans la décomposition de* s_n *.*

   Une autre façon de raisonner est de partir de l'expression de s_n *et de dire que le plus grand nombre inférieur à* $s_n = (e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \sum_{i=p+1}^{n} \frac{k_i}{2^i}) = (e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^n})$ *est le nombre* $(e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^n}) - \frac{1}{2^n} = (e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^{n-1}})$
   (retrait de la quantité $\frac{1}{2_n}$ *de* s_n *).*
   De même le plus petit nombre supérieur à s_n *est le nombre* $(e + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^p})$
   (ajout de la quantité $\frac{1}{2_n}$ *à* s_n *).*
   Par conséquent $l_n = e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 0_p 1_{p+1} 1_{p+2} ... 1_{n-1}$ *et* $r_n = e.k_1 k_2 k_3 ... k_{p-1} 1_p$ *soit encore* $l_n = s_n - \frac{1}{2^n}$ *et* $r_n = s_n + \frac{1}{2^n}$

Nombres Surréels et nombres Dyadiques

Pour les 4 décompositions identifiées, la relation $S_n = \langle\, s_n - \frac{1}{2^n} \,|\, s_n + \frac{1}{2^n} \,\rangle$ *avec* $s_n = \frac{N}{2^n}$ *supérieur ou égal à* $\frac{1}{2^n}$ *(* $n \geqslant 1$ *) et inférieur ou égal à un demi nombre entier de la forme* $\frac{N}{2}$ *(* N *impair et* $\geqslant 1$ *) est vérifiée.*

Cette relation montre donc que si $S_n = \langle\, L \,|\, R \,\rangle$ *, alors* $l_n + r_n = 2 \times s_n$ *et* $r_n - l_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Exemples de nombres surréels associés aux 4 formes de décompositions binaires identifiées :

1. *Forme 1* - $\frac{9}{4} = 10.01 = \langle \frac{9-1}{2^2} \,|\, \frac{9+1}{2^2} \rangle = \langle 2 \,|\, \frac{5}{2} \rangle$ *(* $2 + 5/2 = 2 \times 9/4$ *;* $n = 2$ *)*

2. *Forme 2* - $\frac{1}{2} = 0.1 = \langle \frac{1-1}{2^1} \,|\, \frac{1+1}{2^1} \rangle = \langle 0 \,|\, 1 \rangle$ *(* $0 + 1 = 2 \times 1/2$ *;* $n = 1$ *)*

3. *Forme 2* - $\frac{255}{256} = 0.11111111 = \langle \frac{255-1}{2^8} \,|\, \frac{255+1}{2^8} \rangle = \langle \frac{127}{128} \,|\, 1 \rangle$
   ($127/128 + 1 = 2 \times 255/256$ *;* $n = 8$ *)*

4. *Forme 3* - $\frac{41}{512} = 0.000101001 = \langle \frac{41-1}{2^9} \,|\, \frac{41+1}{2^9} \rangle = \langle \frac{5}{64} \,|\, \frac{21}{256} \rangle$
   ($5/64 + 21/256 = 2 \times 41/512$ *;* $n = 9$ *et* $p = 6$ *)*

5. *Forme 4* - $\frac{3}{8} = 0.011 = \langle \frac{3-1}{2^3} \,|\, \frac{3+1}{2^3} \rangle = \langle \frac{1}{4} \,|\, \frac{1}{2} \rangle$ *(* $1/4 + 1/2 = 2 \times 3/8$ *;* $n = 3$ *et* $p = 1$ *)*

Nombres Surréels et nombres Dyadiques

Inversement, si $l_n + r_n = 2 \times s_n$ *et* $r_n - l_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ *, alors il existe un nombre surréel* S_n *tel que* $S_n = \langle\, l_n \mid r_n \,\rangle$ *dont la valeur est* s_n .

<u>Exemple</u> : Choisissons $n = 2$ *et* $s_2 = \frac{1}{2^{2-1}} = \frac{1}{2}$ *, une solution de* $l_2 + r_2 = 2 \times s_2 = 1$ *et* $r_2 - l_2 = \frac{1}{2^{2-1}} = \frac{1}{2}$ *est* $r_2 = \frac{1}{4}$ *et* $l_2 = \frac{3}{4}$ *. Le nombre surréel* $S = \langle \frac{1}{4} \mid \frac{3}{4} \rangle$ *a pour valeur* $\frac{1}{2}$ *qui peut également s'écrire comme* $\frac{1}{2} = \langle 0 \mid 1 \rangle$ *tout comme* $\frac{1}{2} = \langle \frac{3}{8} \mid \frac{5}{8} \rangle$ *correspondant aux solutions* $(n = 1\ ,\ r_1 = 1\ ,\ l_1 = 0)$ *et* $(n = 3\ ,\ r_3 = \frac{5}{8}\ ,\ l_3 = \frac{3}{8})$ *. Un nombre surréel peut avoir plusieurs écritures et même une infinité comme c'est le cas pour les fractions rationnelles.*
Exemple : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \cdots = \frac{617283945}{1234567890} = \cdots$.

Par analogie avec les fractions rationnelles, nous dirons que la forme canonique d'un nombre surréel est celle pour laquelle le nombre n *est le plus petit. Dans l'exemple étudié ci-dessus, la forme canonique du nombre surréel qui a pour valeur* $s = \frac{1}{2}$ *est donc* $S_1 = \langle 0 \mid 1 \rangle$.
Il est intéressant de remarquer que cette forme irréductible est celle fournie par l'analyse de la décomposition binaire du nombre $s_1 = \frac{1}{2} = 0.1$ *et qui est celle qui « apparaît » dans la construction de [l'arbre des nombres dyadiques] à partir du premier nombre* $0 = \langle\, \emptyset \mid \emptyset \,\rangle$.

A noter également que plus le nombre n *est grand, mieux les valeurs* r_n *et* l_n *encadrent la valeur du nombre surréel* S_n *car* $r_n - l_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ *. La forme canonique correspond donc à celle pour laquelle cet encadrement est le moins précis.*

En écrivant le nombre surréel $S = \langle\, l_n \mid r_n \,\rangle$ *dont la valeur est* s_n *avec* $n \geqslant 1$ *, nous avons les relations d'encadrement suivantes :*

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_{n-1} < l_n < s_i = \frac{(l_i + r_i)}{2} < r_n < r_{n-1} < \cdots < r_2 < r_1 \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Nombres Surréels et nombres Dyadiques

La relation $S_n = \langle\, s_n - \frac{1}{2^n} \mid s_n + \frac{1}{2^n} \,\rangle$ *avec* s_n *de la forme* $\frac{N}{2^n}$ *va nous permettre d'associer un nombre surréel à un nombre réel qui n'est pas dyadique comme les nombres* $1/3$, $22/7$ *ou* 3.1415925 *et ce avec une précision donnée fixée par la quantité* $\frac{1}{2^n}$ *avec* $n \geqslant 1$.

Pour cela, posons l'inégalité $\frac{N-1}{2^n} \leqslant X \leqslant \frac{N+1}{2^n}$ *où* X *est le nombre réel à approximer à la quantité* $\frac{1}{2^n}$ *près. Il vient immédiatement* $(2^n X - 1) \leqslant N \leqslant (2^n X + 1)$.

La valeur $N = [2^n X]$ *où* $[x]$ *est la partie entière de* x *satisfait toujours à cette inéquation, nous pouvons écrire le nombre surréel approchant au mieux le nombre* X *à* $\frac{1}{2^n}$ *près :*

$$\boxed{X \simeq \langle\, \frac{[2^n X] - 1}{2^n} \mid \frac{[2^n X] + 1}{2^n} \,\rangle}$$

Remarque 1 : Si X *est le nombre dyadique* $\frac{N}{2^n}$ *nous retrouvons bien le nombre surréel associé ; à savoir :* $\langle \frac{N-1}{2^n} \mid \frac{N+1}{2^n} \rangle$ *dont la valeur numérique est exactement* $\frac{N}{2^n}$.

Remarque 2 : Ce résultat est cohérent avec l'article sur les Nombres dyadiques qui indique :

« ... tout nombre réel peut être arbitrairement approché autant que l'on veut par des rationnels dyadiques de la forme $N = \frac{[2^n X]}{2^n}$ *où* $[x]$ *exprime la partie entière du nombre* x *. »*

Exemples :

1. $X = 1/3$ *et* $n = 8$: $[2^8 \times \frac{1}{3}] = 85$ *et donc* $\frac{1}{3} \simeq \langle \frac{42}{2^7} \mid \frac{43}{2^7} \rangle = \underbrace{0.33}_{3\ chiffres\ exacts}\,464566\ldots$

2. $X = 3.1415925$ *et* $n = 31$: $[2^{31} \times 3.1415925] = 6746518522$ *et donc*

$$3.1415925 \simeq \langle \frac{6746518521}{2^{31}} \mid \frac{6746518523}{2^{31}} \rangle = \underbrace{3.141592}_{7\ chiffres\ exacts}\,4998000264\ldots$$

A noter que $1/2^8$ *est inférieur à* 4×10^{-3} *et* $1/2^{31}$ *est inférieur à* 5×10^{-10} .

Références

1) Articles Wikipedia : Les Nombres surréels et Les Nombres dyadiques
2) Les nombres surréels - Traduction en français du livre «Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness : A Mathematical Novelette, Addison-Wesley Professional (1974)*» de Donald Knuth (fichier PDF)*